EXPECTATION MAXIMITATION

March 10, 2008

Dado un conjunto de N observaciones de la forma $\{R, R, S, R, R, S, S, R...\}$ - donde R indica cara y S indica sello- las cuales corresponden a los resultados de una serie de N experimentos en los cuales en primer lugar se selecciona de un conjunto de dos monedas una de estas con una probabilidad p la cual puede estar o no cargada, para luego lanzarla al aire y anotar su resultado, ahora suponga que apriori la unica información que se tiene son los resultados u observaciones de cada uno de estos N experimentos y que usted desea descubrir la estructura probabilistica que esta detras de estos resultados.

De acuerdo con estas condiciones es lógico pensar en una modelo probabilistico de la forma:

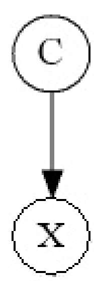

Figure 1: Estructura de dependencia probabilistica

Donde C y X se refieren a un par de variables aleatorias con función de distribución de probabilidad de la forma:

C	0	1
$P(C)$	$1-p$	p

$P(X \mid C)$	$C=0$	$C=1$
0	$1-q$	$1-r$
1	q	r

Dadas estas condiciones podemos emplear ***expectation maximitation*** para hallar los valores de p, q y r, para ello usamos el valor esperado de la verosimilitud de que las observaciones hayan sido generados por una distribución con parametros $\Phi = \{p, q, r\}$ el cual esta dado por:

$$Q[\Phi \mid \Phi^l] = E[logP(X, C \mid \Phi) \mid X, \Phi^l]$$

$$Q[\Phi \mid \Phi^l] = E[\sum_t logP(X^t, C^t \mid \Phi) \mid X, \Phi^l] \; con \; 0 \leq t \leq N$$

Este valor esperado se calcula sobre los valores de $C = \{0, 1\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q[\Phi \mid \Phi^l] = \sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) logP(X^t, C^t = 1 \mid \Phi) + \\ \sum_t P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l) logP(X^t, C^t = 0 \mid \Phi) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde

$$logP(X^t, C^t = 1 \mid \Phi) = log[P(X^t \mid C^t = 1, \Phi) P(C^t = 1 \mid \Phi)]$$

$$logP(X^t, C^t = 1 \mid \Phi) = logP(X^t \mid C^t = 1, \Phi) + logP(C^t = 1 \mid \Phi)$$

En el caso en que $X^t = 0$ tenemos:

$$logP(X^t = 0, C^t = 1 \mid \Phi) = log(1 - r) + log(p)$$

Que en general se puede escribir como:

$$logP(X^t, C^t = 1 \mid \Phi) = X^t log(r) + (1 - X^t) log(1 - r) + log(p) \quad (2)$$

Si $C^t = 1$ y como:

$$logP(X^t, C^t = 0 \mid \Phi) = X^t log(q) + (1 - X^t) log(1 - q) + log(1 - p) \qquad (3)$$

Si $C^t = 0$.

A partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones (2) y (3) podemos reescribir (1) como:

$$Q[\Phi \mid \Phi^l] = \sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) X^t log(r) + (1 - X^t) log(1 - r) + log(p) +$$
$$\sum_t P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l) X^t log(q) + (1 - X^t) log(1 - q) + log(1 - p)$$

Derivando con respecto p:

$$\frac{\partial Q[\Phi \mid \Phi^l]}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) - \frac{1}{1 - p} \sum_t P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l)$$

Igualando a 0:

$$\frac{1}{p} \sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) - \frac{1}{1 - p} \sum_t P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l) = 0$$

$$(1 - p) \sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) = p \sum_t P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l)$$

$$p = \frac{\sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l)}{\sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) + P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l)} \qquad (4)$$

Dado que:

$$\sum_t P(C^t \quad = \quad 1 \mid X^t, \Phi^l) + P(C^t = 0 \mid X^t, \Phi^l) = 1$$

Podemos reescribir (4) como:

$$p = \frac{\sum_t P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l)}{N} \tag{5}$$

Como en este caso la función de distribución de probabilidad de X es desconocida se hace necesario trabajar con las probabilidades condicionales de X con respecto a C, aplicando el teorema de *Bayes* podemos reescribir el numerador de la ecuación (5) de la siguente manera:

$$P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) = \frac{P(X^t \mid C^t = 1, \Phi^l)P(C^t = 1 \mid \Phi^l)}{P(X^t \mid \Phi^l)}$$

O de forma equivalente:

$$P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) = \frac{P(X^t \mid C^t = 1, \Phi^l)P(C^t = 1 \mid \Phi^l)}{P(X^t \mid C^t = 1, \Phi^l)P(C^t = 1 \mid \Phi^l) + P(X^t \mid C^t = 0, \Phi^l)P(C^t = 0 \mid \Phi^l)}$$

Lo que es igual a:

$$P(C^t = 1 \mid X^t, \Phi^l) = \frac{r_l^{X^t}(1 - r_l)^{(1-X^t)}p_l}{r_l^{X^t}(1 - r_l)^{(1-X^t)}p_l + q_l^{X^t}(1 - q_l)^{(1-X^t)}(1 - p_l)}$$

Por lo tanto la ecuación (5) queda de la siguiete forma:

$$p = \frac{\sum_t \frac{r_l^{X^t}(1-r_l)^{(1-X^t)}p_l}{r_l^{X^t}(1-r_l)^{(1-X^t)}p_l + q_l^{X^t}(1-q_l)^{(1-X^t)}(1-p_l)}}{N}$$

Para calcular los valores de q y r se debe realizar el mismo procedimiento sin olvidar que se debe derivar con respecto a q y r respectivamente.