APLICACIONES DE OPTIMIZACIÓN EN COMPUTACIÓN GRÁFICA Y UN EJEMPLITO

ANDRES HURTADO, OSCAR SANCHEZ, FRANCISCO GÓMEZ

Resumen. Gran cantidad de los problemas planteados en computación gráfica pueden parecer a simple vista no solubles, dada la formulación de los problemas, pero utilizando técnicas de optimización matemática, se pueden generar problemas aproximados con características más adecuadas, que permitan encontrar soluciones de una forma más sencilla. Un ejemplo de la aplicación de métodos de optimización lo constituye el problema de los contornos deformables.

1. Introducción

Las técnicas de optimización matemática permiten resolver problemas de computación grafica al generar formulaciones solubles de los problemas.

Los algoritmos de snakes pretenden hacer encajar una curva a partir de las características que se pueden obtener a partir de una imagen, como lo son los bordes, esquinas y líneas. La idea general consiste en hacer coincidir un conjunto de parámetros representados por medio de fuerzas, de forma tal que la energía de varias de ellas vaya disminuyendo a medida que se itera dentro del algoritmo. No sólo se capta una influencia sobre características de una imagen, sino que es necesario un conjunto de parámetros de entrada (fuerzas externas), añadidas a los parámetros de la curva misma que se mueve para adaptarse a los rasgos de la imagen.

La forma de operar algorítmicamente se facilita con ayuda de un poco de conocimiento sobre técnicas de bajo nivel en procesamiento de imágenes, mientras que la deducción analítica de este tipo de problemas no deja de ser complejo.

2. Formalización de los modelos

Para poder aplicar técnicas de optimización matemática en computación gráfica es necesario formular un marco de trabajo que permita plantear los modelos de computación gráfica. A continuación se especifican los elementos de un marco propuesto por [**?**], en este marco se modela un problema de computación gráfica utilizando un conjunto de transformaciones sobre espacios de objetos gráficos.

En primer lugar se define objeto gráfico.

Definición 2.1 (Objeto gráfico)**.** Un objeto gráfico es un par $S \subset \Re^n$ y $f : S \to \Re^m$, S recibe el nombre de soporte geométrico y f recibe el nombre de función atributo.

Por ejemplo, cualquier $S \subset \Re^n$ y su función característica son un objeto gráfico, en este caso el soporte geométrico es S y la función atributo es

Key words and phrases. optimización matemática, computación gráfica, snakes.

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una imagen en color también corresponde a un objeto gráfico para este caso el soporte es $U \subset R^2$ y la función atributo es $f : U \subset R^2 \to R^3$.

2.1. Planteamiento de problemas. Dados $a \in A$ y $b \in B$ espacios de objetos gráficos, y $T : A \to B$ se pueden plantear los siguientes tipos de problemas:

1. Problema directo. Dados a y T, encontrar $b = T(a) \in B$. Figura **??**
2. Problema inverso tipo 1. Dados b y T, encontrar a tal que $T(a) = b$.
3. Problema inverso tipo 2. Dados b y a, encontrar T tal que $T(a) = b$.

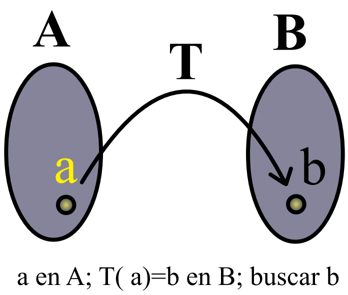

Figura 1. Problema directo

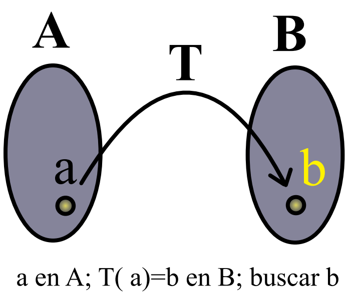

Figura 2. Problema inverso tipo 1

Cuando se da la descripción geométrica (coordenadas espaciales) de una escena y se desea encontrar una imagen 2d que represente la escena, se esta hablando de problema directo. Cuando se dan dos imágenes de un volumen y se quiere encontrar el volumen asociado a la imagen, se esta hablando de un problema inverso tipo 1. Si dadas dos imágenes se busca encontrar la transformación que mapea una imagen a otra, es un ejemplo de un problema inverso tipo 2.

A continuación se muestra una caracterización de los problemas propuesta por Hadamard que clarifica el hecho de porque es difícil resolver problemas de computación gráfica.

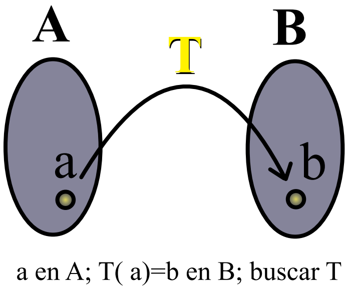

FIGURA 3. Problema inverso tipo 2

2.2. Problemas bien formulados y mal formulados. Un problema se dice bien formulado si cumple con:

1. Su solución existe.
2. Su solución es única.
3. La solución varia en forma continua para variaciones continuas de las condiciones iniciales.

Un problema se dice mal formulado se no cumple alguna de estas tres condiciones.

Los problemas inversos que se plantean en computación gráfica casi siempre caen en la categoría de problemas mal formulados. Sin embargo puede llegar a pensarse equivocadamente que los problemas mal formulados son no solubles, esta visión es errada ya que utilizando técnicas de optimización podemos simplificar el planteamiento los problemas para llevarlos a problemas bien formados. Un ejemplo de este hecho se muestra a continuación.

Resolver el siguiente sistema lineal

$$x + 2y = a \tag{2.1}$$
$$2x + 4y = 2a \tag{2.2}$$

Esta expresión puede formularse en términos de transformaciones así $TX = A$, donde:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}$$

El problema que hay que resolver en este caso es un problema inverso. Es fácil ver que la solución es:

$$X = \begin{bmatrix} a - 2c \\ c \end{bmatrix}$$

Para $c \in \Re^n$, pero esta solución no es única, violando la condición 2. Además la solución no tiene un comportamiento continuo frente a un pequeño cambio en las condiciones iniciales. Si $A' = A + \epsilon$ entonces la solución es.

$$X = \begin{bmatrix} a + \epsilon_x - 2c \\ c \end{bmatrix}$$

Si $\epsilon_x \neq 0$ la solución ni siquiera se encuentra en el conjunto de solución inicial, violando la condición 3.

Para resolver este problema es mejor utilizar una estrategía de optimización.

Encontrar el punto $p \in \Re^2$ tal que la distancia entre $T(p)$ y A sea mínima, de esta forma el punto p es único, además si varia A en forma continua el punto p encontrado también variara en forma continua o por lo menos lo hará T(p). Un ejemplo de un A especifico se encuentra en la figura 5.

Hasta se formularon los tipos de problemas de computación gráfica, se asignaron a dos categorías (bien formulado, mal formulado) y finalmente se observo un ejemplo donde se convierte un problema mal formulado a un problema bien formulado replanteandolo en términos de optimización.

Este ejemplo sugiere que la optimización matemática sirve para resolver problemas mal formularlos al reformularlos a problemas solubles sencillos. Además se vera más adelante también existe un conjunto de problemas directos que se pueden resolver utilizando optimización matemática.

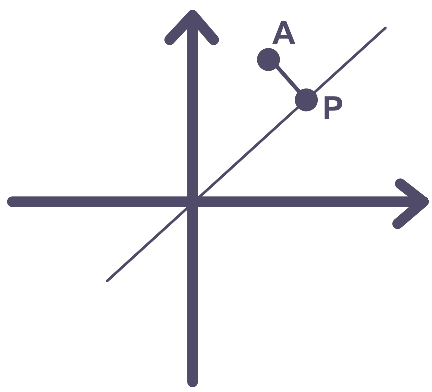

Figura 4. Distancia entre A y T(p)

A continuación se muestra un ejemplo más serio de optimización matemática en computación gráfica.

3. Ejemplo: Contornos activos

Definición 3.1 (Contorno activo)**.** . curvas que minimiza su energía para encajar en características de una imagen. Estas curvas buscan el mínimo de la energía potencial.

Estas curvas reciben su nombre porque se aproxima a los mínimos a través de un proceso de histéresis (parece que se fueran arrastrando a lo largo de las imágenes), como una serpiente. Al comenzar en algunos puntos iniciales, la curva se deformara hasta ciertos rasgos salientes de la imagen. Para esto se hace que los rasgos salientes de la imagen coincidan con mínimos locales de energía potencial.

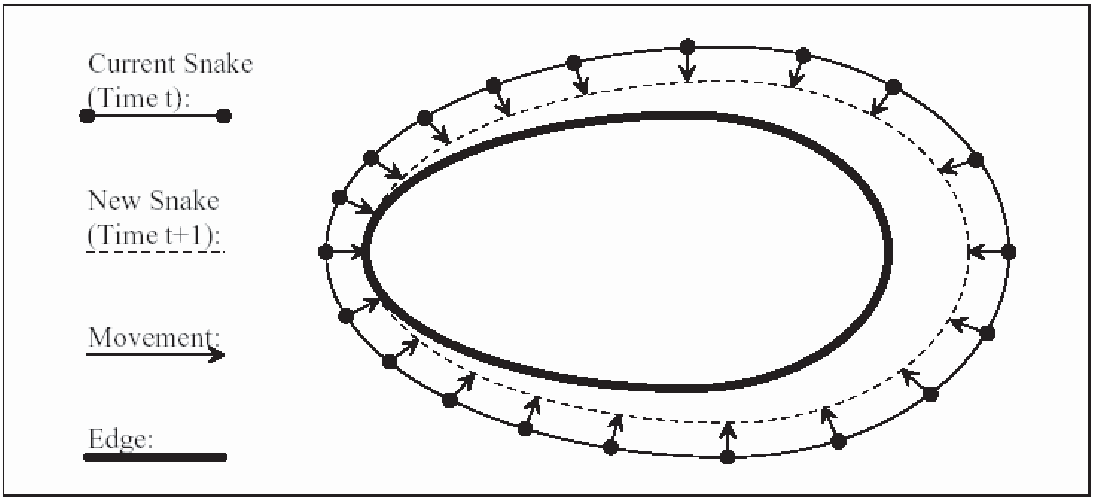

FIGURA 5. Ejemplo de un contorno deformable

Además de la energía potencial la curva es influenciada por una serie de fuerzas.

1. Internas (E_int). Tensión y rigidez.
2. Externas (E_ext). Atracción y repulsión.
3. De la imagén (E_img). Líneas, bordes y terminaciones.

La energía total de una curva parametrica $r(t)$, $t \in [0,1]$ será entonces.

$$E_{total} = E_{int} + E_{ext} + E_{img} \tag{3.1}$$

[] encuentra las expresiones para los términos de tensión y rigidez.

$$E_{ten} = \int_0^1 \|r'(t)\| dt \tag{3.2}$$

$$E_{rig} = \int_0^1 \|r''(t)\| dt \tag{3.3}$$

También encuentra expresiones para los términos de atracción y repulsión, en función de dos tipos de nodos sumidero (s) y volcán v.

$$E_{atra} = \int_0^1 (r(t) - p)^2 dt \tag{3.4}$$

$$E_{rep} = \int_0^1 1/(r(t) - v)^2 dt \tag{3.5}$$

La energía de la imagen se calcula utilizando dog para los bordes, la intensidad de la imagen para las líneas y un filtro detector de esquinas.

3.1. Solución por calculo variacional. El primer método para solucionar este problema de optimización consiste en usar calculo variacional, este método permite hallar el valor optimo de una funcional que no es más que una función de otra función, el calculo variacional nos permite encontrar valores óptimos para un espacio de búsqueda consistente de funciones.

[?,]educe un método para encontrar la función que optimiza la funcional.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x]dx \tag{3.6}$$

Resolviendo la siguiente ecuación diferencial.

$$F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{y'y} - F_y = 0 \tag{3.7}$$

[] utiliza diferencias finitas para resolver el problema variacional de la energía de los contornos deformables, encontrando una solución en términos de un sistema lineal implícito.

3.2. Solución por programación dinámica. [] propone una solución por programación dinámica del problema de los contornos deformables, para ello aprovecha que el snake se mueve sobre un dominio discreto, discretizando sus vértices y el cálculo de su energía, por ejemplo la energía interna la calcula así:

$$E_{int}(v_i) = \alpha|v_i - v_{i-1}|^2 + \beta|v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}|^2 \tag{3.8}$$

Donde v_i es la posición del i-esimo vértice del snake. Si $\beta = 0$, el problema será entonces encontrar el conjunto de vertices que minimizen.

$$\sum_{v_i \in V} E_{int}(v_i) + E_{ext}(v_i) \tag{3.9}$$

La energía es una propiedad local para la vecindad de v_i, por lo que la energía total puede descomponerse como:

$$E(v_1, ..., v_n) = E_1(v1, v2) + \cdots + E_{n-1}(vn - 1, vn) \tag{3.10}$$

Donde $E_i(vi - 1, vi) = E_{int}(v_i) + E_{ext}(v_{i-1}, v_{i-1})$. Si se plantea:

$$s_2(v_2) = min_{v1} E_1(v1, v2) \tag{3.11}$$

$$s_3(v_3) = min_{v2}(s_2(v_2) + E_2(v2, v3)) \tag{3.12}$$

$$\vdots \tag{3.13}$$

$$s_n(v_n) = min_{v2}(s_{n-1}(v_{n-1}) + E_{n-1}(v_{n-1}, v_n)) \tag{3.14}$$

$$\tag{3.15}$$

$s_k(v_k)$ contiene la energía mínima del los primeros $k - 1$ vértices.

Si $\beta \neq 0$ cada termino de energía tiene tres elementos pero el planteamiento continua siendo el mismo.

E-mail address: andreshurtado@eudoramail.com, ossan_p2@yahoo.com, fagomezj@unal.edu.co